Résumé de cours : équations différentielles

Équation différentielle linéaire d'ordre 1

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et a, b deux fonctions continues définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Une équation

$$y' + a(x)y = b(x)$$

s'appelle une **équation différentielle linéaire d'ordre 1**. Résoudre une telle équation différentielle, c'est trouver toutes les fonctions dérivables y définies sur I, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et vérifiant, pour tout $x \in I$, $y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$.

Dans la suite, on supposera toujours que a, b sont continues sur I.

L'**équation homogène associée** est l'équation $y' + a(x)y = 0$.

Proposition (structure de l'ensemble des solutions) : Soit y_P une solution de $y' + a(x)y = b(x)$, appelée solution particulière de l'équation. Alors toute solution y s'écrit $y_P + z$, où z est une solution de l'équation homogène. Réciproquement, toute fonction s'écrivant $y_P + z$, où z est une solution de l'équation homogène, est solution de l'équation différentielle.

La proposition précédente nous dit que pour résoudre l'équation différentielle générale, il suffit de trouver une solution particulière et de résoudre l'équation homogène. Concernant la résolution de l'équation homogène, on a le résultat suivant :

Théorème : Soit A une primitive de la fonction a. Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions $x \mapsto \lambda e^{-A(x)}$, où λ est une constante réelle ou complexe.

On peut toujours trouver une solution particulière, et on a plus précisément le théorème suivant :

Théorème : Pour tout $x_0 \in I$ et tout $y_0 \in \mathbb{K}$, il existe une unique solution à l'équation différentielle $y' + a(x)y = b(x)$ vérifiant $y(x_0) = y_0$.

Le système

$$\begin{cases} y' + a(x)y &= b \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases}$$

s'appelle **problème de Cauchy** de condition initiale $y(x_0) = y_0$.

Pour rechercher une solution particulière, on utilise souvent la méthode de variation de la constante : on cherche une solution sous la forme $\lambda(x)e^{-A(x)}$ où $\lambda : I \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable et on regarde quelle condition doit vérifier λ pour que cette fonction soit une solution de l'équation différentielle.

Équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants

On appelle **équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants** une équation de la forme $y'' + ay' + by = f$ où a, b sont des réels ou des complexes et f est une fonction continue sur un intervalle I. Résoudre cette équation, c'est déterminer toutes les fonctions y définies sur I deux fois dérivables et vérifiant, pour tout $x \in I$, $y''(x) + ay'(x) + by(x) = f(x)$.

L'**équation homogène associée** est l'équation $y'' + ay' + by = 0$.

Théorème : Pour tout $x_0 \in I$ et tous $y_0, y_1 \in \mathbb{K}$, il existe une unique solution à l'équation différentielle $y'' + ay' + by = f$ vérifiant $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y_1$.

Proposition (structure de l'ensemble des solutions) : Soit y_P une solution de $y'' + ay' + by = f$, appelée solution particulière de l'équation. Alors toute solution y s'écrit $y_P + z$, où z est une solution de l'équation homogène. Réciproquement, toute fonction s'écrivant $y_P + z$, où z est une solution de l'équation homogène, est solution de l'équation différentielle.

Résolution de l'équation homogène, cas complexe (recherche des solutions à valeurs complexes) : soit $r^2 + ar + b = 0$ l'équa

$$x \mapsto \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x} \quad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

- si l'équation caractéristique admet une racine double r, alors les solutions de l'équation homogène $y'' + ay' + by = 0$ sont les fonctions

$$x \mapsto (\lambda x + \mu) e^{rx} \quad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

Résolution de l'équation homogène, cas réel (a et b sont dans $\mathbb{R}$, on cherche les solutions à valeurs réelles) : soit $r^2 + ar + b = 0$ l'équation caractéristique associée.

- si l'équation caractéristique admet deux racines réelles r_1 et r_2, alors les solutions de l'équation homogène $y'' + ay' + by = 0$ sont les fonctions

$$x \mapsto \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x} \quad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

- si l'équation caractéristique admet une racine double r, alors les solutions de l'équation homogène $y'' + ay' + by = 0$ sont les fonctions

$$x \mapsto (\lambda x + \mu) e^{rx} \quad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

- si l'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées, $\alpha \pm i\beta$, alors les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$x \mapsto \lambda e^{\alpha x} \cos(\beta x) + \mu e^{\alpha x} \sin(\beta x) \quad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$